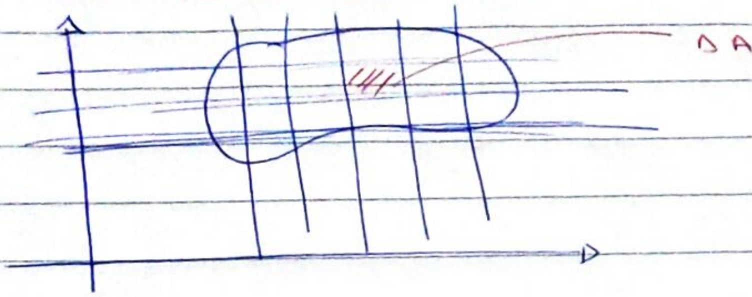
24/2/20

Πυκνότητα και Μάζα



Θεωρούμε ένα λεπτό επίπεδο σχήμα υλικού με εμβαδόν A. Ο τρόπος που κατανέμεται η μάζα του στο B ονομάζεται πυκνότητα. Δηλαδή, το στοιχειώδες κομμάτι

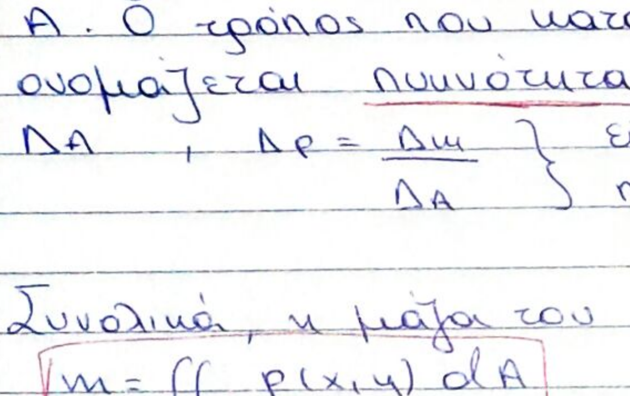
$$\Delta A \quad , \quad \left.\Delta\rho = \frac{\Delta m}{\Delta A}\right\} \text{ είναι σταθερή η μάζα και η κατανομή πυκνότητας.}$$

Συνολικά, η μάζα του σώματος θα είναι

$$\boxed{m = \iint_B \rho(x,y)\, dA}$$

Παράδειγμα Να υπολογίσετε τη μάζα ενός τριγώνου που κατανέμεται σύμφωνα με το νόμο $\rho = xy$

Λύση



$$m = \iint_B \rho(x,y)\, dA$$

$$m = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy \, dy \, dx = \int_0^1 x \left. \frac{y^2}{2} \right|_{1-x}^{1} dx =$$

$$= \int_0^1 x \left[\frac{1}{2} - \frac{(1-x)^2}{2} \right] dx = \frac{5}{24}$$

→

(ή) $m = \iint xy \, dx \, dy = \int_0^1 \int_{1-y}^{1} xy \, dx \, dy$

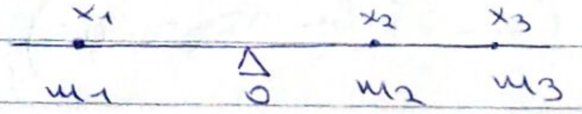
- Τι σχέση έχει το προηγούμενο ολοκλήρωμα με αυτό?

Αν βάλω στο πρώτο $x = y$ τότε θα πάρω το 2ο ολοκλήρωμα.
Αυτό συμβαίνει γιατί $\exists$ συμμετρία

Προσοχή! $m \neq \rho \cdot A$

Κέντρο μάζας

Θεωρούμε 3 μάζες m_1, m_2, m_3 που προσδένονται σε έναν άκαμπτο άξονα. Ο άξονας στηρίζεται σε υπομόχλιο στο σημείο Ο



(Σχήμα τραμπάλας)

Το πρόβλημα που πρέπει να απαντήσουμε έχει 2 μορφές:

(α) Γνωρίζοντας τα m_1, m_2, m_3 και x_1, x_2, x_3 να βρεθεί το Ο ώστε ο άξονας να ισορροπεί

(β) Γνωρίζοντας τα m_1, m_2, m_3 και Ο να βρεθούν τα x_1, x_2, x_3 ώστε ο άξονας να ισορροπεί.

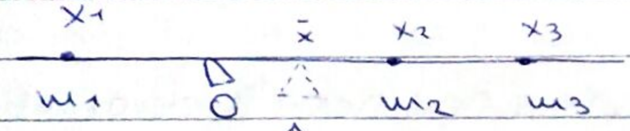
Το σημείο Ο καλείται κέντρο του άξονα

Παρατήρηση: Πολλά συστήματα συμπεριφέρονται ως υλικά σημεία, θεωρώντας όλη τη μάζα τους συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας. Κρίσιμος υπολογισμός είναι ο υπολογισμός του κέντρου μάζας. Στο σύστημα με το υπομόχλιο κάθε μάζα m_i θέλει να στρέψει τον άξονα λόγω του βάρους g (όπως σε μια τραμπάλα). Η επίδραση αυτή καλείται ροπή βαρύτητας (moment of gravity) και γράφεται $\boxed{M_i = m_i g x_i}$ Στο σύστημα μας η συνολική ροπή →

βαρύτητας ως προς το Ο είναι: $M = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3$
Εν γένει σε σύστημα n μαζών και αντίστοιχων αποστάσεων:

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i g x_i = g \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

Έστω σημείο Ο είναι το μόνο σημείο που μετράω αποστάσεις και $\bar{x}$ το σημείο ισορροπίας



(Έστω ότι εδώ ισορροπεί)

Οι αντίστοιχες ροπές είναι $M_i = m_i g (x_i - \bar{x})$

<u>Συνολικά</u> $\boxed{M = \sum_{i=1}^{n} M_i = \sum_{i=1}^{n} m_i g (x_i - \bar{x})}$ (← Άθροισμα)

Στο πεπερασμένο άθροισμα
<u>Δεν</u> έχει νόημα να βρω
τη σίγμα

→ Για να έχω ισορροπία $\boxed{M = 0}$, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{n} m_i g (x_i - \bar{x}) = 0 \overset{g \neq 0}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - \bar{x}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{x} = 0$$

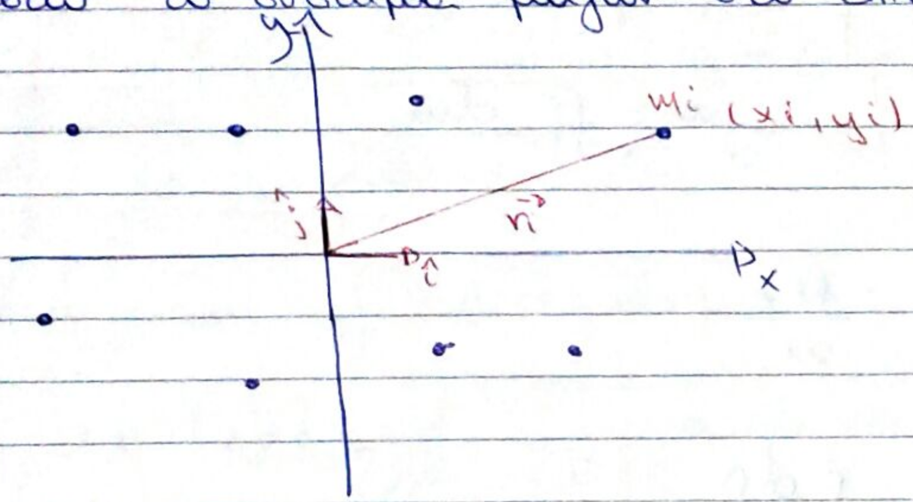
Λύνω ως προς $\bar{x}$: $\boxed{\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$

<u>$\bar{x}$: κέντρο ισορροπίας</u>

Παρατήρηση: Τα σημεία x_i είναι συντεταγμένες σύμφωνα με το σημείο O και έχουν πρόσημο ΔΕΝ είναι αποστάσεις

Μάζες κατανεμημένες στο επίπεδο

Έστω το σύστημα μαζών στο επίπεδο



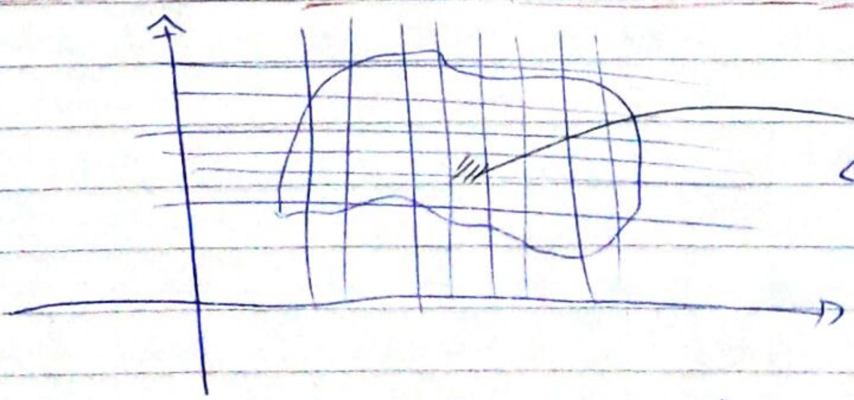
$\vec{r_i} = x_i \hat{i} + y_i \hat{j}$

m_i στη θέση $\vec{r_i}$. Συνολική μάζα είναι $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$

Κάθε μάζα έχει ροπή ως προς τους 2 άξονες.
(Δηλ. ∃ πολλοί τρόποι να κατανεμηθεί η μάζα π.χ. όταν κουνάω τη τραμπάλα)

Ορίζω τις ροπές: $\boxed{M_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i}$ $\boxed{M_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i}$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}} \quad , \quad \boxed{\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$$



$m_i, (x_i, y_i)$

+ Σύστημα στοιχειωδών μαζών όπου το κάθε τετραγωνάκι αποτελεί στοιχειώδη μάζα. Το πρόβλημα είναι ότι τα "τετραγωνάκια" είναι άπειρα. Πώς αθροίζονται αυτά?

Βασιζόμενοι στην ιδέα της διαμέρισης μπορούμε να υπολογίσουμε το κέντρο μάζας ενός λεπτού επίπεδου σχήματος (π.χ ενός δίσκου από αλουμίνιο). Θεωρούμε ότι κάθε κομμάτι της διαμέρισης αντιστοιχεί σε μια απειροστή μάζα τότε:

$$\boxed{M_x = \iint_B y_i \, dm} \quad , \quad \boxed{dm = \rho \, dA}$$

$$\boxed{M_y = \iint_B x_i \, dm} \quad , \quad \boxed{m = \iint dm}$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{M_y}{m}} \quad \boxed{\bar{y} = \frac{M_x}{m}}$$

Συνολικά $\boxed{m = \iint_B \rho \, dA}$ $\boxed{\bar{x} = \dfrac{\iint_B \rho \, dA}{\iint_B \rho \, dA}}$

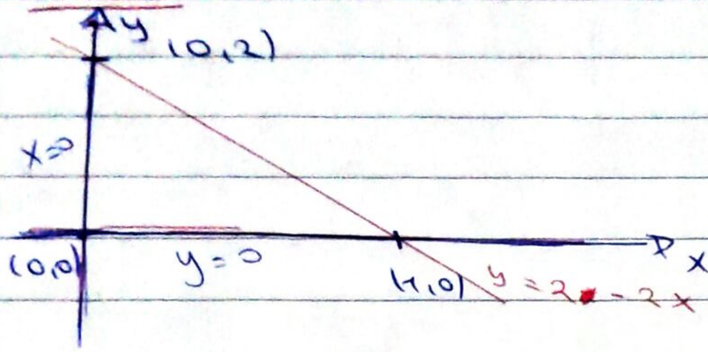
$$\boxed{y = \frac{\iint_B y \rho \, dA}{\iint_B \rho \, dA}}$$

Παρατήρηση: Αν $\rho = \rho_0 \in \mathbb{R}$ μια σταθερά η πυκνότητα διαγράφεται και το αντίστοιχο σημείο καλείται κεντροειδές (centroid)

~~Τώρα~~

Παράδειγμα: Να βρεθεί το κέντρο μάζας ενός λεπτού τριγωνικού επιπέδου σχήματος με κορυφές $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$ και πυκνότητα $\rho = 1 + 3x + y$

Λύση:



$$y = ax + b \begin{cases} b = 2 \\ a + b = 0 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$$

$$y = 2 - 2x$$

Ζητώ το $\iint x\rho \, dy \, dx$

$$\iint x\rho \, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{2-2x} x\rho \, dy\, dx = M_y = \dots = \frac{11}{3}$$

$$m = \int_0^1 \int_0^{2-2x} \rho \, dy\, dx = \dots = \frac{8}{3}$$

$$M_x = \int_0^1 \int_0^{2-2x} y\rho \, dy\, dx = \dots = 1$$

! Πώς θα κάνω επαλήθευση να δω ότι τα έκανα σωστά?

Παίρνω το $\bar{x} = 11/3 \,/\, 8/3 = \frac{11}{8} \notin$ μέσα στο τρίγωνο άρα καταλαβαίνω ότι έβαλα ανάποδα τα M_x, M_y

Συνολικά $M_y = \frac{11}{3}$ $M_x = 1$ $m = \frac{8}{3}$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{11}{8} \qquad \bar{y} = \frac{3}{8}$$